

A propos des raisonnements par récurrence

1) Une distraction pour commencer :

De la puissance insoupçonnée du raisonnement par récurrence.

“Montrons par récurrence sur $n \geq 1$ que dans toute boîte de n crayons de couleur, tous les crayons sont de la même couleur. La propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$. On considère alors une boîte de $(n + 1)$ crayons de couleur, qu’on numérote de 1 à $n + 1$. En enlevant le dernier crayon, on obtient une sous-boîte qui par hypothèse de récurrence, ne contient que des crayons de la même couleur. De même en enlevant le premier crayon. Les couleurs des deux sous-boîtes sont identiques, car il s’agit de la couleur des crayons communs aux deux sous-boîtes. D’où le résultat.”

Si vous êtes d’accord avec ce raisonnement, parlez-en à votre papetier habituel.

Remarque : La correction se trouve dans le petit cours d’Animath (après l’exercice 7).

2) Pour utiliser un raisonnement par récurrence, il faut souvent chercher à prouver par récurrence une propriété plus forte que celle qui est demandée.

Exemple : Considérons $f(x) = \exp(-x^2)$.

On note $f^{(n)}$ la dérivée n -fois de f . Autrement dit, on a $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

On se propose de prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On ne peut pas raisonner directement par récurrence, car la dérivée d’une fonction convergeant vers 0 converge nécessairement vers 0. En revanche, on peut démontrer aisément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la dérivée $f^{(n)}(x)$ est de la forme $P_n(x) \exp(-x^2)$, où P_n est un polynôme.

Sachant que l’exponentielle l’emporte sur les puissances, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

Exercice : On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de \tan , par

$$\tan^{(0)} = \tan \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \tan^{(n+1)} = (\tan^{(n)})'.$$

a) Exprimer \tan' , \tan'' et $\tan^{(3)}$ en fonction de \tan .

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\tan^{(n)}$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Commentaire : Il faut chercher à prouver par récurrence une propriété plus forte que celle qui est demandée, car il est évident que la positivité d’une fonction n’implique pas celle de sa dérivée.

Indication : L'idée est de montrer que $\tan^{(n)}$ est de la forme $P_n(\tan)$, où P_n est un polynôme à coefficients (entiers) positifs. En effet, on a $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x)$.

3) Inégalité arithmético-géométrique (preuve par la méthode de Descartes) : On se propose de prouver que pour tout entier $n \geq 2$ et pour tous réels x_1, \dots, x_n strictement positifs,

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Ainsi, la moyenne géométrique est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique.

- a) Démontrer que la propriété est vraie pour $n = 2$, puis pour tout entier n de la forme 2^p .
 b) On suppose un entier $n \geq 2$ quelconque. On considère un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq 2^p$. En posant $d = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ et $x_i = d$ pour tout $n < i \leq 2^p$, déduire de a) l'inégalité souhaitée.
 c) Démontrer l'inégalité géométrico-harmonique (valable pour tous réels x_1, \dots, x_n strictement positifs) :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$$

Solution : a) La propriété est vraie pour $n = 2$:

Comme $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, alors $2\sqrt{xy} \leq (x^2 + y^2)$, c'est-à-dire $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Montrons désormais par récurrence la propriété pour $n = 2^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, par récurrence sur p .

Supposons qu'elle est vraie au rang p .

Posons $m = 2^p$ et $n = 2m$. Posons $A = \frac{1}{m}(x_1 + \dots + x_m)$ et $B = \frac{1}{m}(x_{m+1} + \dots + x_n)$.

On a, d'après le cas $n = 2$, $(AB)^{1/2} \leq \frac{1}{2}(A + B)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $(x_1 \dots x_m)^{1/m} \leq A$. De même pour B .

On en déduit $(x_1 \dots x_m x_{m+1} \dots x_n)^{1/n} = (AB)^{1/2} \leq \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$.

D'où le résultat pour $n = 2^{p+1}$.

b) On suppose n quelconque. On considère un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq 2^p$, et on pose $m = 2^p$.

On prend $d = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$, et on pose $x_i = d$ pour tout $n < i \leq m$.

La moyenne des x_i vaut d . Par b), on a : $(x_1 \dots x_n d^{m-n})^{1/m} \leq d$, c'est-à-dire $(x_1 \dots x_n)^{1/d} \leq d^{n/m}$.

D'où le résultat : $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq d$.

c) Il suffit d'appliquer l'inégalité arithmético-géométrique aux $\frac{1}{x_k}$.

4) Exemple de raisonnement par récurrence forte.

Exercice : Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence simple que tout entier $n \geq 2$ est produit de nombres premiers.

Solution : Montrons par récurrence simple la propriété $P(n)$: " Tout entier k compris entre 2 et n s'écrit comme produit de nombres premiers ". La propriété est vraie pour $n = 2$. Soit $n \geq 3$, et supposons que tout entier compris entre 2 et $n - 1$ est produit de nombres premiers. Si n est premier, la propriété est évidente. Sinon, n s'écrit $n = ab$, avec $2 \leq a < n$ et $2 \leq n < b$. On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à a et b .

Remarque : On ne peut pas ici raisonner par récurrence simple, car l'existence de la décomposition de $n - 1$ en produit de facteurs premiers ne permet pas de déterminer celle de n .

Commentaire : De façon générale, lorsqu'on sait que $Q(0)$ est vraie et qu'on peut déduire $Q(n)$ du fait que $Q(k)$ est vraie pour tout entier $k < n$, alors $Q(n)$ est vraie pour tout n en utilisant un raisonnement par récurrence simple, appliqué à la propriété $P(n)$ définie par l'énoncé suivant : " $Q(k)$ est vraie pour tout $k \leq n$ ".

On dit alors qu'on démontre la propriété $Q(n)$ par récurrence *forte*.

5) La descente infinie ou principe de Fermat. Le principe de Fermat affirme qu'il n'existe aucune suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante dont les éléments u_n sont des entiers naturels. Une autre formulation du principe de Fermat : L'ordre dans \mathbb{N} est un "bon ordre", c'est-à-dire toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

Commentaire : Le principe de Fermat est essentiel en informatique pour justifier la terminaison des algorithmes. C'est par exemple le cas si on veut justifier l'obtention d'un reste nul dans l'algorithme d'Euclide. Mais le principe de Fermat est aussi très utile pour prouver que l'inexistence de solution, comme par exemple dans l'exercice suivant.

Exercice : On considère l'équation $(E) : x^2 + y^2 = 3z^2$ dont on cherche les solutions dans \mathbb{N}^3 .

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}$, x^2 est congru à 0 ou à 1 modulo 4.

b) En déduire que si $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ est solution de (E) , alors x, y, z sont pairs et $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z)$ est aussi solution.

c) Montrer que $(0, 0, 0)$ est l'unique solution de (E) dans \mathbb{N}^3 .

Solution : a) Si x est pair, c'est-à-dire de la forme $x = 2k$, alors 4 divise $x^2 = 4k^2$, donc x^2 est congru à 0 modulo 4. Si x est impair, c'est-à-dire de la forme $x = 2k + 1$, alors $x^2 = 4(k^2 + 1) + 1$,

donc x^2 est congru à 1 modulo 4.

b) Supposons que (x, y, z) est solution. On a : $3z^2 \equiv 0$ ou 3 [4]. Si x et y sont impairs, alors $x^2 + y^2 \equiv 2$ [4]. Si l'un est pair et l'autre est impair, alors $x^2 + y^2 \equiv 1$ [4]. Comme $x^2 + y^2 = 3z^2$, alors x et y sont pairs. Donc $z^2 \equiv 0$ [4] et z est pair. Donc x, y, z sont pairs. Comme $(\frac{1}{2}x)^2 + (\frac{1}{2}y)^2 = 3(\frac{1}{2}z)^2$, alors $(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}z)$ est aussi solution de (E).

c) Supposons par l'absurde qu'il existe une solution non nulle (x, y, z) . Comme $x^2 + y^2 = 3z^2$ et que $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, alors $z > 0$. Par récurrence immédiate, on déduit de b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x2^{-n}, y2^{-n}, z2^{-n})$ est aussi solution.

On obtient une suite $(z2^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante d'entiers naturels, ce qui est absurde.

6) Remarque sur l'utilisation de l'hypothèse de récurrence.

Dans les exemples suivants, on notera la façon dont est appliquée l'hypothèse de récurrence.

Exemple : Démontrons par récurrence que si (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) sont des réels positifs vérifiant $a_i \leq b_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$, alors $\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}} \leq \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{b_n}}}$.

La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons la propriété vraie au rang n . Soient (a_1, \dots, a_{n+1}) et (b_1, \dots, b_{n+1}) des réels positifs tels que $a_i \leq b_i$ pour tous $1 \leq i \leq n + 1$.

Il est important de souligner qu'on ne peut pas conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) . Mais par hypothèse de récurrence, on sait que la propriété est vraie pour toute famille de $2n$ réels positifs vérifiant les inégalités requises. Il y a alors deux preuves possibles :

Première méthode : On applique l'hypothèse de récurrence à $(a_2, \dots, a_{n+1}, b_2, \dots, b_{n+1})$.

On obtient $A = \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \dots + \sqrt{a_{n+1}}}} \leq \sqrt{b_2 + \sqrt{b_3 + \dots + \sqrt{b_{n+1}}}} = B$.

On en déduit $\sqrt{a_1 + A} \leq \sqrt{b_1 + B}$, qui est l'inégalité demandée.

Seconde méthode : On applique l'hypothèse de récurrence à $(a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha, b_1, \dots, b_{n-1}, \beta)$, où $\alpha = a_{n-1} + \sqrt{a_n}$ et $\beta = b_{n-1} + \sqrt{b_n}$. On conclut directement.

Exercice : Dans la question e) où on raisonnera par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on utilisera l'hypothèse de récurrence de façon particulièrement judicieuse.

- a) Déterminer la valeur minimale de $f(t) = t + \frac{1}{t}$ lorsque t décrit \mathbb{R}_+^* .
- b) Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
- c) Soient des réels x et y tels que $0 < x \leq 1 \leq y$. Comparer $1 + xy$ et $x + y$.
- d) Soient $n \geq 2$ et x_1, x_2, \dots, x_n des réels strictement positifs dont le produit vaut 1, c'est-à-dire tel que $x_1 x_2 \dots x_n = 1$.

Montrer qu'il existe deux entiers i et j distincts tels que $x_i \leq 1 \leq x_j$.

- e) En utilisant les questions précédentes, montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que si x_1, x_2, \dots, x_n des réels strictement positifs dont le produit vaut 1, alors $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$.
- f) En déduire une nouvelle preuve de l'*inégalité arithmético-géométrique* (vue au paragraphe 3).

Solution : a) On a $f'(t) = 1 - t^{-2}$ pour tout $t > 0$. Un tableau des variations prouve que la valeur minimale de f est $f(1)$, c'est-à-dire 2.

- b) On déduit le résultat de a) en considérant $t = \frac{x}{y}$.
- c) On a $1 + xy - x - y = (1 - x)(1 - y) \leq 0$, donc $1 + xy \leq x + y$.
- d) *Il faut veiller à bien trouver i et j distincts.* Si tous les x_i étaient > 1 , il en serait de même de leur produit. Donc il existe i tel que $x_i \leq 1$.

Si tous les autres x_j étaient < 1 , on aurait $x_1 x_2 \dots x_n < 1$ (car $n \geq 2$), donc il existe $j \neq i$ tel que $x_j \geq 1$.

- e) Immédiat pour $n = 1$. Pour $n = 2$, la propriété résulte de a).

Soit $n \geq 2$. Supposons $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. On a donc $x_1 x_2 \dots (x_{n-1} x_n) = 1$.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence aux $(n - 1)$ réels x_1, \dots, x_{n-2} et $(x_{n-1} x_n)$.

Donc $x_1 + \dots + x_{n-2} + (x_{n-1} x_n) \geq (n - 1)$, c'est-à-dire $x_1 + \dots + x_{n-2} + (1 + x_{n-1} x_n) \geq n$.

Or, quitte à permuter les x_i dès le début, on peut, d'après d), supposer que $0 < x_{n-1} \leq 1 \leq x_n$.

On a alors $1 + x_{n-1} x_n \leq x_{n-1} + x_n$, donc on obtient finalement $x_1 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \geq n$.

- f) On pose $m = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}$. En posant $y_i = \frac{x_i}{m}$, on a $y_1 y_2 \dots y_n = 1$.

Par e), on obtient $y_1 + y_2 + \dots + y_n \geq n$, c'est-à-dire $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq nm$.

En divisant par n , on obtient l'inégalité arithmético-géométrique.

7) Deux exercices pour conclure.

a) Déterminer le nombre a_n de parties du plan délimitées par n droites deux à deux sécantes et trois à trois non concourantes.

b) On considère un ensemble de $2n$ points dans le plan euclidien, avec $n \geq 2$, et on suppose construits au moins $n^2 + 1$ segments entre ces points. Montrer que la configuration obtenue contient au moins un triangle.

Solution : a) On suppose fixées n droites. Toute nouvelle droite rencontre ces droites en n points, délimitant ainsi $n + 1$ intervalles, dont chacun coupe en deux une des parties du plan délimitées par les n droites.

Donc $a_{n+1} = a_n + (n + 1)$. Comme $a_0 = 1$, on obtient $a_n = 1 + (1 + 2 + \dots + n) = 1 + \frac{1}{2}n(n + 1)$.

b) La propriété est vraie pour $n = 2$: On considère quatre points et on suppose construits cinq segments entre ces points. Entre quatre points, il y a six segments possibles. Donc un seul segment est supprimé. Tout triangle ne contenant pas à la fois les deux sommets de ce segment convient.

Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vraie au rang n , et considérons $2n + 2$ points. On suppose construits $(n + 1)^2 + 1$ segments entre ces points. On choisit un des segments, qu'on note $[AB]$, et on note E l'ensemble des $2n$ autres points.

Premier cas : Il y a au moins $n^2 + 1$ segments entre les points de E . Par hypothèse de récurrence, il existe donc un triangle formé par les segments joignant les points de E .

Second cas : Il y a au plus n^2 segments entre les points de E . Comme $(n + 1)^2 + 1 = n^2 + (2n + 2)$, il y a au moins $(2n + 1)$ segments joignant un élément de E à A ou B . Or, il y a exactement $2n$ segments possibles joignant A à un point de E , et $2n$ segments joignant B à un point de E . Il existe donc au moins un point C joignant à la fois A et B . Le triangle ABC convient.